P5 — Mouvement dans un champ de gravitation

Thème 3 · Mouvement et interactions

Table des matières

1 Pourquoi ce chapitre ?

Pourquoi la Lune ne tombe-t-elle pas sur la Terre ? (Spoiler : **elle tombe**, en permanence… mais elle rate la Terre à chaque fois.) Pourquoi les satellites GPS tournent-ils pile à 20 000 km d'altitude et pas ailleurs ? Comment Kepler a-t-il deviné, sans Newton et sans télescope moderne, que les planètes suivent des ellipses — et comment Newton l'a ensuite **démontré** en une seule équation ?

Ce chapitre boucle la trilogie mécanique. On prend la **2 loi de Newton** (chapitre P3) et on l'applique au cas le plus spectaculaire de l'univers : **le mouvement des corps célestes**. À la clé : les trois lois de Kepler, la vitesse des satellites, et la compréhension intuitive de ce qu'est une « orbite ».

2 Ce que tu vas apprendre

- La **loi de gravitation universelle** et le lien avec le champ $\vec{\mathcal{G}}$
- Appliquer la 2 loi de Newton dans le **repère de Frenet** pour un mouvement circulaire
- Démontrer que la vitesse d'un satellite en orbite circulaire est $v = \sqrt{GM/r}$
- Les **trois lois de Kepler** (orbites, aires, périodes)
- Calculer une **période orbitale** et retrouver la 3 loi de Kepler

---

3 1. La force et le champ de gravitation

3.1 a. Loi de gravitation universelle (Newton, 1687)

Deux corps ponctuels A et B de masses m_A et m_B, séparés d'une distance r, s'attirent mutuellement selon une force dirigée le long de la droite (AB) :

Formule — Force de gravitation

$$\vec{F}_{A/B} = -G\,\frac{m_A \times m_B}{r^2}\,\vec{u}_{A\to B}$$

- $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{\;2}}$ (constante de gravitation universelle)
- m_A, m_B : masses des deux corps (kg)
- r : distance entre les centres de masse (m)
- $\vec{u}_{A\to B}$: vecteur unitaire dirigé de A vers B
- Le **signe moins** indique que la force est **attractive** (dirigée de B vers A)

Analogie — L'aimant cosmique

Imagine que tout objet possédant une masse est un tout petit aimant… mais cet aimant n'attire **que les autres masses**, il n'y a pas de pôle nord/sud, et l'attraction diminue en $1/r^2$. Une pomme attire la Terre autant que la Terre attire la pomme. Ce qui diffère, c'est l'effet : la Terre est tellement massive qu'elle ne bouge pas, tandis que la pomme, elle, tombe.

3.2 b. Du champ $\vec{\mathcal{G}}$ au champ de pesanteur $\vec{g}$

On peut reformuler la force en introduisant un **champ de gravitation** $\vec{\mathcal{G}}$ créé par A à l'endroit où se trouve B :

$$\vec{F}_{A/B} = m_B\,\vec{\mathcal{G}} \qquad \text{avec} \qquad \vec{\mathcal{G}} = -G\,\frac{m_A}{r^2}\,\vec{u}_{A\to B}$$

Le champ ne dépend que de l'astre attirant, pas de l'objet attiré. C'est ce champ qu'on appelle $\vec{g}$ au voisinage de la Terre :

$$g(h) = G\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

Exemple — g à l'altitude de l'ISS

L'ISS orbite à $h = 410$ km, donc à $r = R_T + h = 6{,}38 \times 10^6 + 4{,}10 \times 10^5 \approx 6{,}79 \times 10^6$ m.

$$g_{ISS} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}{(6{,}79 \times 10^6)^2} \approx 8{,}6 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

C'est seulement **12 % de moins** qu'au sol. Les astronautes ne flottent donc **pas** parce que « la gravité est nulle » — ils flottent parce qu'ils sont en **chute libre continue** autour de la Terre !

Piège — « En apesanteur » « sans gravité »

Dans l'ISS, g vaut encore ~8,6 N · kg 1. Les astronautes ressentent l'apesanteur parce qu'eux **et** la station tombent ensemble : tout le monde a la même accélération $\vec{g}$, donc aucun poids apparent. C'est la même sensation que dans un ascenseur dont le câble lâche.

---

4 2. Mouvement circulaire d'un satellite : la 2 loi en Frenet

On considère un satellite de masse m en orbite **circulaire** de rayon r autour d'un astre de masse M (Terre ou Soleil). La seule force qui agit est la force de gravitation, dirigée **vers le centre de l'astre** — c'est-à-dire vers le centre du cercle.

4.1 a. Application de la 2 loi de Newton

On se place dans le **repère de Frenet** $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ où $\vec{u}_N$ pointe vers le centre du cercle. Dans ce repère :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{r}\,\vec{u}_N$$

La force de gravitation vaut $\vec{F} = G\frac{mM}{r^2}\,\vec{u}_N$ (entièrement normale, rien sur $\vec{u}_T$!).

En projetant $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ sur les deux axes :

La force de gravitation est entièrement ***centripète*** *(selon $\vec{u}_N$). Rien sur $\vec{u}_T$: la vitesse v reste constante.*

Sur $\vec{u}_T$ (tangent) :

$$0 = m\,\frac{dv}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \text{constante}$$

Le mouvement est uniforme : la vitesse du satellite ne change pas en valeur.

Sur $\vec{u}_N$ (normal, vers le centre) :

$$G\,\frac{mM}{r^2} = m\,\frac{v^2}{r}$$

On simplifie par m, puis on isole v^2 :

Formule — Vitesse d'un satellite en orbite circulaire

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}}$$

- G : constante de gravitation universelle ($6{,}67 \times 10^{\;11}$ S.I.)
- M : masse de l'astre attracteur (kg)
- r : rayon de l'orbite (m), compté **depuis le centre** de l'astre

La vitesse ne dépend pas de la masse du satellite ! Un cube à sucre et l'ISS à la même altitude auraient la même vitesse orbitale.

Exemple — Vitesse de l'ISS

ISS : $r = 6{,}79 \times 10^6$ m, $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg.

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}{6{,}79 \times 10^6}} \approx 7{,}66 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 27\,600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

L'ISS fait le tour de la Terre en environ **93 minutes**.

Piège — Masse du satellite vs masse de l'astre

Dans la formule $v = \sqrt{GM/r}$, M **est la masse de l'astre central** (Terre pour un satellite terrestre, Soleil pour une planète). La masse du satellite s'est simplifiée dans le calcul — elle n'intervient pas !

---

5 3. Les trois lois de Kepler

Avant Newton, Johannes **Kepler** (1571-1630) avait déjà découvert, à partir des observations de son maître Tycho Brahe, trois régularités empiriques dans le mouvement des planètes. La 2 loi de Newton permet de les **démontrer**.

5.1 a. 1 loi — Loi des orbites

> *Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre de masse d'une planète est une* ***ellipse*** *dont le centre de masse du Soleil est l'un des foyers.*

Les orbites planétaires ne sont pas des cercles parfaits — ce sont des ellipses. Mais pour la Terre, l'excentricité est si faible (0,017) qu'on peut l'approximer par un cercle.

5.2 b. 2 loi — Loi des aires

> *Le segment reliant le centre du Soleil et celui de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.*

Analogie — Les épluchures de pomme

Imagine que tu trempes un pinceau dans la peinture et que tu peins une fine tranche entre le Soleil et la planète. En 1 jour, la surface peinte est toujours la même, que la planète soit près du Soleil (périhélie) ou loin (aphélie). Conséquence : **près du Soleil, la planète doit aller vite** (pour balayer la même aire dans le même temps) ; loin, elle ralentit. C'est pour ça que l'été boréal dure un peu plus longtemps que l'hiver !

5.3 c. 3 loi — Loi des périodes

Pour toutes les planètes orbitant autour du Soleil, le rapport entre le carré de la période T et le cube du demi-grand axe a est une ***constante*** *qui ne dépend que de l'astre central :*

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante} = \frac{4\pi^2}{G\,M_{\text{astre}}}$$

Démonstration dans le cas circulaire ($a = r$) :

Le satellite parcourt un périmètre $2\pi r$ à la vitesse v :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{GM/r}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

En élevant au carré :

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\,r^3}$$

Exemple — L'orbite géostationnaire

Un satellite géostationnaire a une période $T = 86\,164$ s (1 jour sidéral). Son rayon d'orbite :

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24} \times (86\,164)^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}22 \times 10^7 \text{ m}$$

Soit une **altitude** $h = r - R_T \approx 36\,000$ km. C'est précisément là qu'on place les satellites de télévision : à cette altitude, ils tournent en 24 h et semblent « immobiles » depuis le sol.

---

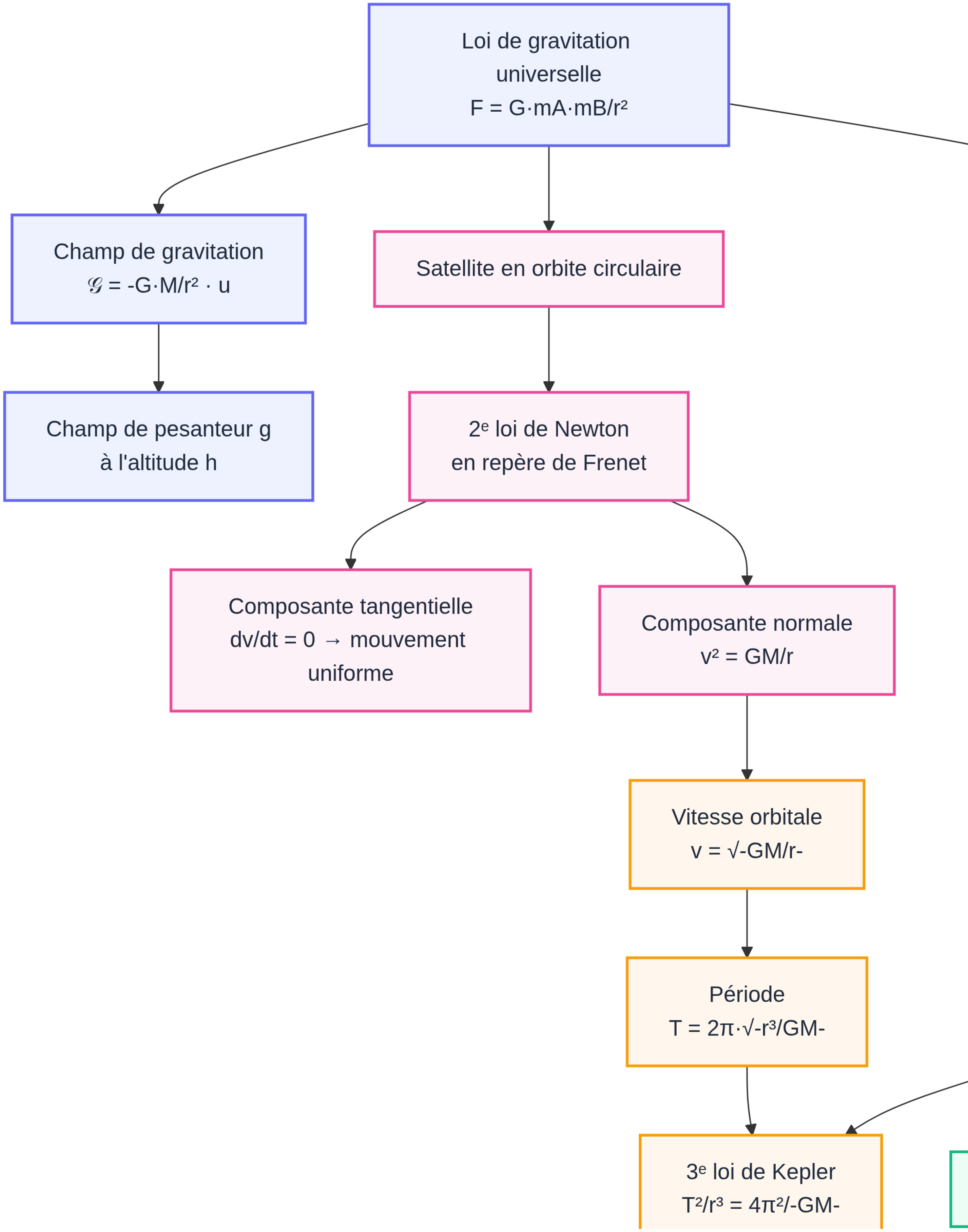
6 4. Méthodologie — Utiliser la 2 loi en Frenet

Démarche en 4 étapes pour les orbites circulaires

1. **Système** : identifier le satellite ou la planète étudiée ; préciser le référentiel (géocentrique, héliocentrique, astrocentrique) supposé galiléen.
2. **Bilan des forces** : une seule force, $\vec{F} = G\dfrac{mM}{r^2}\vec{u}_N$, dirigée vers le centre.
3. **2 loi de Newton dans le repère de Frenet** : projection sur $\vec{u}_T$ mouvement **uniforme** ; projection sur $\vec{u}_N$ équation qui donne v.
4. **Exploitation** : selon ce qui est demandé, en tirer v, T, r ou la masse de l'astre central.

---

7 Carte mentale du chapitre



---

8 À retenir absolument

1. **Loi de gravitation** : $\vec{F}_{A/B} = -G\, m_A m_B / r^2\, \vec{u}_{A \to B}$ (attractive, en $1/r^2$).
2. **Champ de pesanteur** à l'altitude h : $g(h) = GM_T/(R_T + h)^2$.
3. **Mouvement circulaire** autour d'un astre : **uniforme** (la gravitation est purement normale).
4. **Vitesse** : $v = \sqrt{GM/r}$, **indépendante de la masse du satellite**.
5. **Période** : $T = 2\pi\sqrt{r^3/(GM)}$.
6. **3 loi de Kepler** : $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$ = constante pour un astre donné.
7. L'**apesanteur** en orbite n'est pas due à une absence de gravité mais à la **chute libre** permanente.

---

9 Quiz — Teste-toi !

---

10 Pour aller plus loin

- Cours officiel (PDF)
- Chapitres liés : P3 — 2 loi de Newton · P4 — Champ uniforme